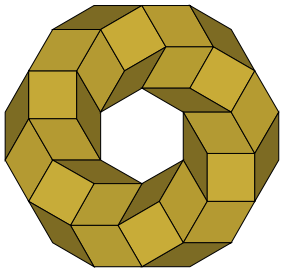

Prophet Analytics

Whitepaper

# Paradox Messunsicherheit - Warum heute alle Messungen unsicher sind und warum das gut ist

**Author: Dr.-Ing. Stefan Prorok**

**Date: 14.05.2023**

---

**Eine moderne und verlässliche Messtechnik ist eine der Grundvoraussetzungen für die kontinuierliche Verbesserung von Produkten. Es besteht ein sich wechselseitig positiv verstärkenden Effekt zwischen Verbesserungen in der Messtechnik und Verbesserung von Produktionsverfahren. Anforderungen an Messunsicherheit und metrologische Rückführbarkeit sind für viele Branchen reglementiert (z.B. ISO 9001 und darauf aufsetzenden Branchennormen). Der zentrale Begriff, der beschreibt, wie genau eine Messung werden kann, ist Messunsicherheit. Umso erstaunlicher ist es, dass die heutige Definition von Messunsicherheit erst 30 Jahre alt ist. Ich möchte in diesem Whitepaper beschreiben, wie Messunsicherheit heute verstanden wird und wie es zu dieser Entwicklung kam.**

Die Entwicklung der Messunsicherheit ist Teil einer größeren Entwicklung, die sich bereit über mehrere tausend Jahre hinzieht. Bereits frühe Kulturen erkannten die Notwendigkeit vergleichbare Messungen durchzuführen[1]. In den frühen Kulturen ging es dabei um Dinge des täglichen Lebens, wie eine Hand voll Getreide oder eine Elle Stoff. Diese ersten Versionen von Einheiten waren häufig von menschlichen Körperteilen abgeleitet. Natürlich führt dies zu dem Problem, dass menschliche Körper unterschiedlich sind und Messungen damit wenig vergleichbar. Der Ansatz hat jedoch den großen Vorteil, dass die nötigen Maßstäbe jederzeit und für jeden verfügbar sind.

Obwohl diese einfachen aus Körperteilen abgeleiteten Einheiten bis in das späte 18. Jahrhundert hinein auch in Europa gebräuchlich waren, stellte die fehlende Vergleichbarkeit ein ständiges Problem dar. Ein weiteres Problem bestand darin, dass es ausgesprochen schwierig war Messgrößen von einer Einheit in eine andere umzurechnen. Diese Schwierigkeiten führten dazu, dass zu es zu unterschiedlichen Zeitpunkten in der Geschichte immer wieder Bestrebungen gab, ein einheitliches Messsystem mit allgemein anerkannten Einheiten zu installieren.

Ein frühes Beispiel für die Einführung eines Einheitensystems ist die Königselle aus dem alten Ägypten. Hier wurde ein Längenstandard eingesetzt, der beim Bau der Pyramiden eine große Rolle gespielt hat[2]. Die Idee ist der Idee eines modernen Einheitensystems sehr ähnlich. Man hat dazu die Länge des Pharao-Unterarms als Längenstandard festgelegt und einen Steinblock hergestellt, der dieser Ellenlänge entspricht. Für

die Arbeit an den Pyramiden wurden weitere Ellen aus Holz, Metall oder Stein hergestellt, die an dem ursprünglichen Block abgemessen und auf die gleiche Länge gebracht wurden. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel einer Königselle.

Figure 1: Zeigt das Beispiel eines ägyptischen Ellenstabes. Bildquelle: Museo Egizio, Creative Commons.

Heute würde man von dem ursprünglichen Block als Referenznormal sprechen und bei den abgeleiteten Längenstandards als Gebrauchsnormale. In diesem System ist bereits die Idee enthalten, dass Normale auf einen Standard zurückgeführt werden müssen, um vergleichbar zu sein. Das Beispiel des Längenstandards in Ägypten zeigt, dass Rückführbarkeit auf ein Normal als Idee für den Aufbau eines Einheitensystems bereits bekannt war. Es gab damals jedoch noch keine Möglichkeit die Unsicherheit bei der Rückführung (heute würde man von Kalibrierunsicherheit sprechen) auszudrücken.
Alte Einheitensysteme hatten noch weitere Einschränkungen, die uns heute unbekannt sind. Einheiten wurden bis ins 17. Jahrhundert hinein als geometrische Objekte verstanden. Längen in ganzzahligen Vielfachen eines Längenstandards können einfach gemessen werden. Auch Brüche sind möglich (eine halbe oder eine Viertel Elle). Man arbeitete daher mit abzählbaren Größen. Diese Einheitensysteme erlauben es mit wenig Aufwand Längen und Gewichte zu vergleichen, aber die Darstellung eines Messwerts als Fließkommazahl und Einheit war unbekannt. Mit zunehmender Verbesserung von Messinstrumenten und Fortschritten in der Physik waren Brüche und ganzzahlige Vielfache von Einheiten nicht mehr genau genug. Für quantitative Messungen an Naturphänomenen war eine genauere Unterteilung der Einheiten notwendig. Erst im Laufe des 17. Jahrhunderts setzten sich rationale Zahlen als Messwerte durch.

Im 17. und 18. Jahrhundert wurden immer größere Mengen an Daten zur Naturbeobachtung angehäuft. Diese Messungen waren mit Messfehlern behaftet. Die Frage wie mit Fehlern behaftete Messungen behandelt werden können, entwickelte sich zu einem wichtigen Zweig der Mathematik. Bedeutende Beiträge zur quantitativen Analyse von Messdaten finden sich unter anderem in den Werken von Legendre, Laplace und Gauß. Ihre Beiträge zu Untersuchungen von Himmelskörpern sind frühe Beispiele für die Auswertung von Messergebnissen in größerem Umfang. Insbesondere waren Legendre und Laplace die ersten, die Ende des 18. Jahrhunderts systematische Verfahren entwickelten, um Messfehler zu berücksichtigen[3]. Sie entwickelten die Methode der kleinsten Fehlerquadrate, die bis heute eines der Standardverfahren im Umgang mit statistischer Streuung darstellt.

Legendre und Laplace ging es hauptsächlich darum mehrere fehlerbehaftete Messungen zu kombinieren, um den Gesamtfehler zu reduzieren. Ihre Fehlerquadrate stellten eine erste Beschreibung der Messunsicherheit dar. Es war jedoch nicht möglich Messunsicherheit als Kennzahl anzugeben. Die Grundlage, um Fehlerquadrate statistisch analysieren zu können, wurde später von Carl Friedrich Gauß gelegt. Er definierte 1809 erstmals die Normalverteilung. 1810 konnte Laplace zeigen, dass Messungen, die Fehler aus unterschiedlichen Fehlerquellen aufweisen, einer Normalverteilung entgegenstreben. Auch heute gehen wir bei einer Messunsicherheit im ersten Schritt häufig von normalverteilten Fehlern aus. Abbildung 2 zeigt eine Messung mit einer Messstreuung.

Die Fehler der Messungen in Abbildung 2 schwanken um einen Mittelwert. Um die Streuung der Messwerte um den Mittelwert grafisch darzustellen, werden häufig Histogramme verwendet. Das Histogramm der Messwerte ist in Abbildung 3 dargestellt. Es zeigt sich, dass die Abweichungen vom Mittelwert nahezu Normalverteilt sind. Die Breite der Normalverteilung dabei ist ein Maß für die Unsicherheit der Messung. Da die Breite der Normalverteilung aus den Messdaten geschätzt werden kann, wird die Unsicherheit selbst zu einer

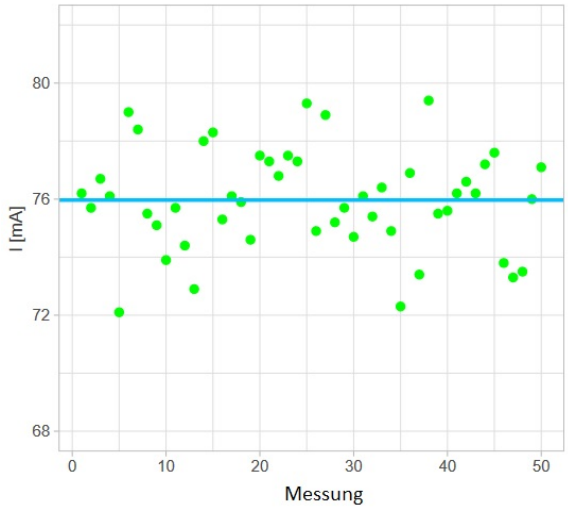


Figure 2: Zeigt wiederholte Messungen eines elektrischen Stromes. Die horizontale Linie zeigt den Mittelwert.

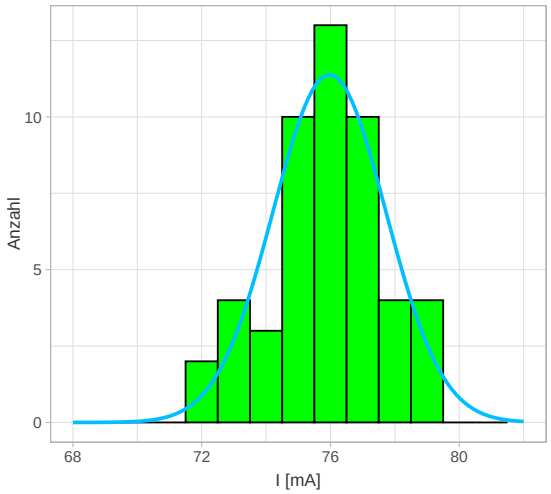


Figure 3: Zeigt ein Histogramm der Messungen aus Abbildung 2, welches mit einer Normalverteilung überlagert ist.

messbaren Größe.

Eine zweite, für die Messtechnik wichtige, Entdeckung von Carl Friedrich Gauß war die nach ihm benannte Fehlerfortpflanzung. Sie beschreibt, wie Streuungen aus unterschiedlichen Einflussfaktoren (z.B. Temperatur, Luftfeuchte etc.) zu einer Gesamtmessunsicherheit zusammengefasst werden können. Die Berechnung von Messunsicherheit beruht auch heute noch im Wesentlichen auf der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass es mit Hilfe der theoretischen Arbeiten von Gauß erstmals möglich war die Messunsicherheit zu bestimmen und durch Fehlerfortpflanzung von einer Messung auf die nächste zu übertragen. Diese beiden Entdeckungen waren entscheidend für die Entwicklung eines rückführbaren Einheitensystems.

Neben den theoretischen Grundlagen zur Beschreibung von Messunsicherheit wurde im 19. Jahrhundert auch ein wichtiger normativer Meilenstein erreicht. Am 20. Mai 1875 unterzeichneten 17 Staaten die Meter-Konvention[4]. Sie definierte unter anderem einen allgemein gültigen Längenstandard. Das Meter sollte die Vielzahl von unterschiedlichen Einheiten ablösen, die bis dahin für Längenmessungen gebräuchlich waren. Mit einem einheitlich definierten Normal und den theoretischen Grundlagen, die durch Gauß, Laplace und Legendre gelegt worden waren, war es nun erstmals möglich ein verlässliches und allseits anerkanntes Einheitensystem aufzubauen. Dies schuf gleichzeitig die Voraussetzungen den Begriff der Messunsicherheit in Normenwerken zu verankern. So wird beispielsweise die Messunsicherheit 1942 in der DIN 1319 offiziell als Begriff der Messtechnik eingeführt[5].

Schon früh wurden Stimmen laut, die auf die Schwächen des neuen Metersystems hinwiesen. Die neuen Standards waren stark von Umgebungseinflüssen abhängig. Maxwell wies darauf hin, dass Einheiten möglichst direkt von physikalischen Grundphänomenen abgeleitet werden sollten[6]. Beispiele hierfür sind die Ladung eines Elektrons oder die Lichtgeschwindigkeit. Das sogenannte Gauß-Einheitensystem für Elektrodynamik steht stellvertretend für diese Bemühungen. Es war zwar in der Physik weit verbreitet, konnte sich aber nicht gegen das heute gebräuchliche SI-Einheitensystem durchsetzen.

Ein wichtiger Schritt hin zu besserer Vergleichbarkeit und höherer Messgenauigkeit bestand in der Einführung des SI-Einheitensystems im Jahr 1960. Im Zuge dieser Einführung wurde das Längennormal durch eine Längenmessung auf Basis der Lichtgeschwindigkeit abgelöst. Dies führte zu einer besseren Vergleichbarkeit von Messungen und zu einer bis dahin unerreichten Genauigkeit. Im Zuge der sich stetig verbessernden Messtechnik wurde eine Schwäche der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung klar. Schon Gauß selbst war bewusst, dass die Fehler-

fortpflanzung nur für zufällig verteilte Einflussgrößen gültig ist. In praktischen Messanordnungen sind jedoch nicht alle Fehler zufälliger Natur. Es gibt neben zufälligen Fehlern auch systematische Fehlereinflüsse, die nicht Gegenstand der Gauß'schen Fehlerrechnung sind.
Systematische Fehlereinflüsse können anhand des Beispiels eines Gewichtssatzes erklärt werden. Die Massekörper eines Gewichtssatzes können nur mit endlicher Genauigkeit hergestellt werden. Jedes Gewichtsnormal hat daher eine gewisse Abweichung zum gewünschten Nominalwert. Diese Abweichung vom Nominalwert ist systematisch und ändert sich nicht über die Zeit (vorausgesetzt, dass sich das Gewicht nicht chemisch oder durch Feuchtigkeitsaufnahme in der Masse verändert). Wenn dieser Gewichtssatz verwendet wird eine Waage zu kalibrieren, so überträgt sich die systematische Abweichung des Gewichtsnormals auf das Kalibrierergebnis der Waage. Obwohl es sich um systematische Abweichungen handelt, ist die Größe der systematischen Abweichung unbekannt und kann nur innerhalb bestimmter Grenzen angegeben werden.
Abbildung 4 zeigt eine schematische Darstellung einer Rückführbarkeitskette für Gewichtssätze. Systematische Fehler werden durch die Transfernormale von einer Stufe auf die nächste übertragen[1]. Hinzu kommt die Streuung des Messmittels selbst. Dies ist der Grund, weshalb sich die Messunsicherheit von einer Stufe auf die nächste erhöht.
Solange die systematischen Abweichungen in einer Kalibrierung klein gegenüber den sonstigen Messunsicherheiten sind, kann der Beitrag zur Messunsicherheit vernachlässigt werden. Die Transfernormale sollten aus diesem Grund immer ein Vielfaches genauer sein als das zu kalibrierende Messmittel. Bei hochgenauen Messungen können systematische Fehler allerdings nicht mehr vernachlässigt werden. Bis in die 80er Jahre bestand kein Konsens darüber, wie mit systematischen Messabweichungen umgegangen werden sollte[7]. Die unterschiedliche Berücksichtigung von Messunsicherheit hatte große Folgen. Eine der wichtigsten Eigenschaften unseres modernen Einheitensystems ist Rückführbarkeit. Rückführbarkeit bedeutet, dass die Messunsicherheit aller Normale bis zurück zum Urnormal angegeben werden kann. Wenn unterschiedliche Labore Messunsicherheit unterschiedlich definieren, dann ist die Rückführung nicht mehr gegeben.

[1] Bei Gewichtssätzen sind die systematischen Fehler der Transfernormale ausschlaggebend. Bei anderen Messungen können auch die Transfernormale selbst eine zufällige Streuung aufweisen.

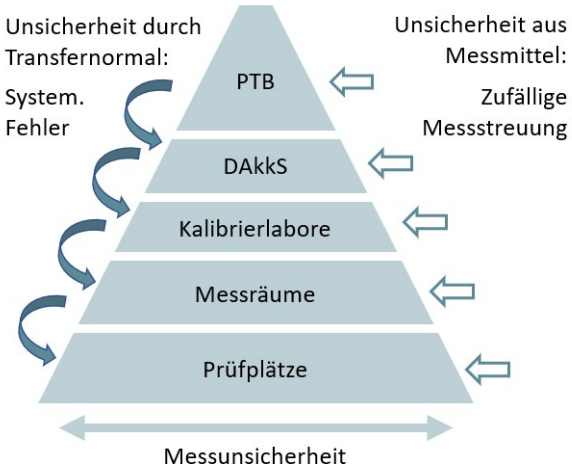


Figure 4: Zeigt eine schematische Darstellung der Rückführbarkeitskette für Gewichte.

Ein einfaches Beispiel soll dies zeigen: Angenommen ein Kalibrierdienstleister stellt Kalibrierscheine aus und weist für seine Kalibrierung eine Messunsicherheit aus. Der Kalibrierdienstleister gibt dabei die Messunsicherheit mit zwei Standardabweichungen an, was dem gängigen Wert entspricht. Für zwei Standardabweichungen liegt die Kalibrierung mit 95% Wahrscheinlichkeit innerhalb des angegebenen Unsicherheitsbereichs. Ein Kunde wünscht nun eine geringere Messunsicherheit für seine Anwendung. Da der Dienstleister keine genaueren Messaufbauten hat, entschließt er sich stattdessen die Messunsicherheit nun mit einer Standardabweichung auszuweisen. Dies entspricht 68% Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert innerhalb des Unsicherheitsbereichs liegt. Der Kalibrierdienstleister hat damit seine Unsicherheit halbiert, allerdings geht dies zulasten des Vertrauensbereichs. Werte außerhalb des Unsicherheitsbereichs werden wahrscheinlicher. Wenn dies zwischen einem Kalibrierdienstleister und einem Kunden passiert, dann ist dies in der Regel ersichtlich, weil auf einem Kalibrierschein angegeben werden muss, wie viele Standardabweichungen für die Messunsicherheit verwendet werden. Kalibrierdienstleister müssen jedoch

ihre Normale ebenfalls kalibrieren. Wie Kalibrierdienstleister ihre Normale kalibrieren, ist aber für einen Kunden nicht sichtbar und so können sich Unsicherheiten über die Rückführbarkeitskette fortpflanzen.

Das Beispiel ist konstruiert, aber es zeigt, dass eine einheitliche Definition der Messunsicherheit eine weitere Grundvoraussetzung für ein rückführbares Einheitensystem darstellt. Auch die Art der Messdurchführung hat einen großen Einfluss auf die Messunsicherheit. Aus diesem Grund sind sowohl Messverfahren als auch die Messunsicherheit selbst genormt. Im Jahr 1993 wurde die Norm Guide for Uncertainty in Measurements veröffentlicht[8][2]. Diese Norm beschreibt verbindlich, wie Messunsicherheit berechnet werden sollte. Sie beruht auf der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung, aber berücksichtigt auch systematische Messfehler. Heute ist es nichts Ungewöhnliches, wenn auf Messberichten Fehlerbalken angezeigt werden, die die Messunsicherheit angeben. Wie diese Fehlerbalken definiert sind, wurde allerdings erst vor 30 Jahren festgelegt.

Auch heute noch arbeiten internationale Labore an weiterer Verbesserung unseres Einheitensystems. Erst 2019 wurden im SI-Einheitensystem alle Urnormale durch physikalische Phänomene abgeleitet. Organisationen wie ILAC, die 1999 ins Leben gerufen wurde, kümmern sich darum, dass die nationalen Labore nach international vergleichbaren Standards arbeiten. So ist es möglich länderübergreifend rückführbare Messungen sicherzustellen. Die nationalen Akkreditierungsstellen wachen dabei über die Einhaltung der internationalen Standards und Richtlinien. Heute hat das Zusammenspiel aus international anerkannten Organisationen und den von ihnen verfassten technischen Richtlinien dazu geführt, das SI-Einheitensystem nahezu überall auf der Welt anerkannt ist.

## Zusammenfassung

Die moderne Messtechnik hat seit ihrer Entstehung mehrere wichtige Meilensteine durchlaufen. Frühe Einheitensysteme erlaubten lediglich zählende und vergleichende Messungen. Vereinheitlichte Einheitensysteme existierten bereits in frühen Hochkulturen, aber diese Systeme hatten keine Rückführbarkeit im heutigen Sinne. Diese Möglichkeit wurde erst durch die theoretischen Arbeiten von Carl Friedrich Gauß geschaffen. Er zeigte, wie Unsicherheit über die Normalverteilung messbar gemacht werden konnte. Dies legte die Grundlage für Messunsicherheit und metrologische Rückführbarkeit, wie wir sie heute kennen. Heute wird bei allen hochgenauen Messungen eine Messunsicherheit angegeben. Eigentlich messen wir heute daher nicht mehr in Zahlenwerten und Einheit, sondern immer in Intervallen. Diese Intervalle der Messunsicherheit erlauben uns sofort eine Aussage darüber, ob eine Kundenspezifikation in Gefahr ist. Messunsicherheit ist allgegenwärtig, aber paradoxerweise wird unsere Welt dadurch um Einiges sicherer.

[2] Die aktuelle Fassung enthält einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung.

## Über den Autor

Dr.-Ing. Stefan Prorok ist promovierter Diplom-Ingenieur der Elektrotechnik. Er war acht Jahre lang in verschiedenen Führungspositionen in der Automobilindustrie tätig. Er ist Autor mehrerer Patente für industrielles maschinelles Lernen sowie eines Buches über Statistiken in der industriellen Produktion. Darüber hinaus ist er als Trainer für die Deutsche Gesellschaft für Qualität (DGQ) tätig. Seit 2023 bietet er mit seinem Unternehmen Ingenieurbüro Prorok und Partner Beratungs- und Softwarelösungen an (für mehr Informationen siehe link).

## References

[1] Marc E Himbert. A Brief History of Measurement. *The European Physical Journal Special Topics*, 172(1):25–35, 2009.

[2] Carl Richard Lepsius. *Die alt-aegyptische Elle und ihre Eintheilung*. K. Akademie der Wissenschaften, 1865.

[3] Stephen M Stigler. *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*. Harvard University Press, 1986.

[4] Johannes Hoppe-Blank. Vom metrischen System zum internationalen Einheitensystem-100 Jahre Meterkonvention. Technical report, SIS-75-5948, 1975.

[5] DIN 1319. *Grundbegriffe der Meßtechnik*. Deutsches Institut für Normung, 1942.

[6] James Clerk Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume 1. Oxford: Clarendon Press, 1873.

[7] Robert B Abernethy and Barbara Ringhiser. The History and Statistical Development of the new ASME-SAE-AIAA-ISO Measurement Uncertainty Methodology. In *Proc. AIAA/SAE/ASME/ASME 21st Joint Propulsion Conf*, pages 8–10. Citeseer, 1985.

[8] JCGM. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Standard, Joint Committee for Guides in Metrology, 2020.